

SAMENVATTING BOEK STABILITEIT

Deze samenvatting geeft een overzicht van de te bestuderen onderdelen uit het boek **Mechanica : Stabiliteit van het Evenwicht**. Het boek is opgezet als een compleet overzicht van de basismechanica die over het onderwerp stabiliteit handelt. Dit gaat verder dan de leerdoelen die getoetst worden op het tentamen van het onderdeel Stabiliteit. Het boek is in vergelijking tot het oude dictaat hierdoor in omvang toegenomen maar dit komt met name door de vele zeer uitgebreide voorbeelden. Hierdoor is dit boek veel beter geschikt als modern leermiddel. In deze leeswijzer zal per hoofdstuk worden aangegeven welke onderdelen getoetst worden en welke delen verrijkingsstof zijn. Een ruime hoeveelheid opgaven is opgenomen in het boek aan het einde van ieder hoofdstuk. Het is beslist niet de bedoeling alle opgaven te bestuderen. Maak een selectie aan de hand van de in deze leeswijzer genoemde opgaven. De antwoorden/uitwerkingen van genoemde opgaven in deze leeswijzer zijn te vinden op het onderwijsportal of op de website van Hans Welleman.

Hoofdstuk 1

In dit hoofdstuk wordt het kader en de begrippen uiteengezet. Deze stof is essentieel voor het herkennen van stabiliteitsproblemen. De theorie kan op het tentamen worden getoetst met theorievragen. Belangrijke constatering van de kennismaking met “stabiliteit van het evenwicht” is dat een stabiel evenwicht een evenwicht is waarbij de belaste constructie bij een kleine verplaatsing t.o.v. de evenwichtsstand terugkeert naar deze evenwichtsstand. Zie hiervoor ook de introductie-video op het onderwijsportal.

Hoofdstuk 2

Dit hoofdstuk start met de stabiliteit van het evenwicht van starre staafsystemen met 1 vrijheidsgraad. Aan de hand van deze eenvoudige systemen is de kern van een stabiliteitsprobleem uit een te zetten. Paragraaf 2.1 en de voorbeelden behandelen de standaard aanpak:

- zet de constructie in de verplaatste stand
- maak de constructie vrij en geef alle verbindingskrachten aan
- stel de evenwichtsvoorwaarde(n) op in de verplaatste stand
- onderzoek de aard van dit evenwicht en bepaal bij welke belasting er nog juist evenwicht is

Bij het oplossen van de gelineariseerde evenwichtsvergelijking blijkt dat de verplaatsing van de vrijheidsgraad er niet toe doet (onder de aanname dat deze klein is)

Paragraaf 2.2 over het naknikgedrag is geen tentamenstof. Het begrip naknikgedrag moet je wel kennen, het bepalen ervan valt buiten het bestek van deze cursus.

Paragraaf 2.3 behandelt een aantal essentiële voorbeelden. Van voorbeeld 1 en 9 is het naknikgedrag leesstof.

Hoofdstuk 3

In dit hoofdstuk worden gekoppelde staafsystemen behandeld met 1 vrijheidsgraad. In paragraaf 3.1 wordt de essentie hiervan weergegeven. De standaard aanpak van hoofdstuk 2 is ook hier van toepassing. Bij het opstellen van de evenwichtsvergelijkingen moet er echter op gelet worden dat het evenwicht wordt beschouwd van ieder vrijgemaakt deel en dat tussen deze vrijgemaakte delen verbindingskrachten kunnen zitten. Belangrijk bij de oplossingsfase is om de evenwichtsvergelijkingen zodanig te combineren dat deze verbindingskrachten worden geëlimineerd. In het voorbeeld op blz. 50 wordt dit verder verduidelijkt. De generalisatie naar

systemen met meer dan twee gekoppelde staven is louter ter toelichting. De afgeleide formules zijn niet bedoeld om te onthouden. De essentie is dat de belasting op een gekoppeld systeem kan worden vervangen door een *aanpendelende belasting* die extra op het geschoorde element wordt geplaatst. Zie hiervoor ook de sheets over dit onderwerp. Dit onderdeel wordt veelal getoetst op het tentamen en keert terug in hoofdstuk 8. De theorie wordt in paragraaf 3.3 verder verduidelijkt aan de hand van voorbeelden waarbij voorbeeld 1, 2, 5, 8 en 9 de belangrijkste zijn.

Hoofdstuk 4

Na constructies met 1 vrijheidsgraad wordt in dit hoofdstuk de complexiteit verhoogd door te kijken naar constructies met 2 vrijheidsgraden. Dit is in feite een tussenstap naar het onderzoeken van continue systemen van hoofdstuk 5.

Paragraaf 4.1 introduceert de aanpak voor systemen met 2 vrijheidsgraden. Essentieel is dat er t.o.v. de systemen met 1 vrijheidsgraad nu een stelsel van evenwichtsvergelijkingen ontstaat. Dit stelsel is een homogeen stelsel (rechterlid is nul) waarvoor alleen een niet-triviale oplossing kan worden gevonden indien de determinant van de coëfficiëntenmatrix gelijk is aan nul. Dit levert twee kniklasten. De laagste kniklast is maatgevend. Ook nu blijkt dat de grootte van de verplaatsingen van de vrijheidsgraden niet kunnen worden bepaald. De verhouding tussen de verplaatsingen kunnen wel worden bepaald. Net als bij systemen met 1 vrijheidsgraad is de uitbuigingsvorm wel bekend, de grootte ervan echter niet. Op blz. 77 wordt in een opmerking bij voorbeeld 1, de relatie gelegd met het eigenwaarde probleem in de wiskunde. Deze opmerking is tentamenstof. Bestudeer voorbeeld 2 bekijk voorbeeld 3 en 4.

Hoofdstuk 5

Na de starre systemen wordt in dit hoofdstuk gekeken naar buigzame staven. Dit leidt tot een continue beschrijving m.b.v. de differentiaalvergelijking voor buigingsknik. Belangrijke paragrafen zijn 5.1 en 5.2. In paragraaf 5.1 wordt voor een eenvoudige staaf de Eulerse knikkracht bepaald m.b.v. een 2^e orde D.V. Belangrijk bij deze afleiding is om in te zien dat dit mogelijk is aangezien de verticale oplegreacties nul zijn waardoor in iedere snede de verticale component van de snedekrachten S_z ook nul moet zijn. In paragraaf 5.2 is voor de algemene op druk belaste buigzame staaf niet voldaan aan deze eis en leidt de complete aanpak van het evenwicht in de verplaatste stand tot een 4^e orde D.V. waarvan de algemene oplossing in paragraaf 5.3 wordt bepaald. Als de continue belastingen afwezig zijn geldt:

$$EIw'''' + Fw'' = 0$$

$$S_z = M' - Fw'$$

$$w(x) = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x + C_3 x + C_4 \quad \text{met : } \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

Van dit theoriegedeelte is het belangrijk de modelstappen te (her)kennen en met de differentiaalvergelijking de basisknikgevallen te kunnen onderzoeken. Met name het omgaan met de randvoorwaarden is hierbij essentieel. De resultaten van deze aanpak leidt tot de vijf basisknikgevallen die op blz. 100 en 101 grafisch zijn weergegeven. Het oordeelkundig kunnen toepassen van deze basisgevallen is essentieel.

De voorbeelden illustreren deze aanpak. Let vooral op voorbeeld 10 op blz. 108. Bij het gelijktijdig uitknikken van de twee op druk belaste staven kunnen de staven geen stijfheid (weerstand) aan elkaar ontleen en heeft de starre verbinding tussen de beide staven feitelijk geen betekenis. Nog een belangrijk aspect dat in dit hoofdstuk aan de orde komt is het onderscheid tussen globale instabiliteit en locale instabiliteit. Ook is het onderkennen van verschillende knikvormen een belangrijk element. Voorbeelden hiervan zijn ook in het

college behandeld met name of de starre knikvorm (globale knik) dan wel de locale (Eulerse knik) maatgevend is.

Hoofdstuk 6

Hoofdstuk 6 handelt over verend ingeklemde op druk belaste buigzame staven. De veren zijn rotatieveren. In dit hoofdstuk worden drie basissystemen behandeld:

- paragraaf 6.1 : Enkelzijdig verend ingeklemde staaf
- paragraaf 6.2 : Tweezijdig verend ingeklemde staaf, ongeschoorde constructie
- paragraaf 6.3 : Tweezijdig verend ingeklemde staaf, geschoorde constructie

In paragraaf 6.1 wordt gestart met de enkelzijdig verend ingeklemde staaf. Met de 4^e orde D.V. en vier randvoorwaarden wordt een homogeen stelsel vergelijkingen opgelost waarmee de kniklast uit een transcendente vergelijking kan worden opgelost. Deze oplossingsmethode is weliswaar exact maar niet erg praktisch. Aangetoond wordt dat een zeer nauwkeurige benaderingsformule kan worden gevonden voor deze enkelzijdig verend ingeklemde staaf.

$$\frac{1}{F_k} = \frac{1}{r/l} + \frac{1}{\frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}}$$

LET OP: Deze formule is alleen geldig voor de enkelzijdig verend ingeklemde staaf!

De alternatieve benadering van dit probleem in paragraaf 6.1.2 is geen tentamenstof.

De tweezijdig verend ingeklemde staaf uit paragraaf 6.2 is zodanig opgelegd dat de steunpunten loodrecht t.o.v. de oorspronkelijke staaf-as kunnen verplaatsen. Deze situatie komt voor in *ongeschoorde* raamwerken. Door handig gebruik te maken van de plek van het buigpunt in de uitbuigingsvorm kan een formule worden opgesteld voor de kniklast.

$$F_k = \frac{(\eta_1 + \eta_2)^2}{\eta_1 \eta_2 (\eta_1 + \eta_2 - 4)} \times \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

met :

$$\eta_1 = 4 + \frac{10}{\rho_1}; \rho_1 = \frac{r_1 l}{EI}$$
$$\eta_2 = 4 + \frac{10}{\rho_2}; \rho_2 = \frac{r_2 l}{EI}$$

LET OP: Deze formule is alleen geldig voor de verend ingeklemde **ongeschoorde** staaf!

In deze paragraaf wordt tevens aangetoond dat de kniklast voor de enkelzijdig verend ingeklemde staaf uit paragraaf 6.1 ook met deze formule kan worden gevonden.

In paragraaf 6.3 komt het laatste basisgeval voor verend ingeklemde buigzame staven aan bod. De staaf is nu geschoord hetgeen inhoudt dat de beide steunpunten loodrecht op de staaf-as niet t.o.v. elkaar verplaatsen. Aangetoond wordt dat voor deze situatie een kniklast kan worden gevonden met de onderstaande formule:

$$F_k = \frac{(5 + 2\rho_1)(5 + 2\rho_2)}{(5 + \rho_1)(5 + \rho_2)} \cdot \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

met : $\rho_1 = \frac{r_1 l}{EI}$ $\rho_2 = \frac{r_2 l}{EI}$

LET OP: Deze formule is alleen geldig voor de verend ingeklemde **geschoorde** staaf!

In paragraaf 6.4 is het geheel nog een keer samengevat met een overzicht van de gebruikte formules voor diverse configuraties van rotatieveren. De formules worden op het tentamen allemaal gegeven op een bijgevoegd formuleblad.

In paragraaf 6.5 worden diverse voorbeelden behandeld. Bestudeer met name voorbeeld 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Hoofdstuk 7 : Bijzondere verende ondersteuning

In hoofdstuk 7 zijn diverse voorbeelden gegeven van mogelijke verende ondersteuning. Dit kunnen zowel rotatie als translatieveren zijn. Van dit hoofdstuk is alleen van belang om de stappen in de modelvorming te herkennen. Met name het formuleren van de randvoorwaarden en het uitwerken van de randvoorwaarden m.b.v. de D.V. zijn hierbij belangrijke stappen.

Hoofdstuk 8 : Buigzame knikstaaf met aanpendelende kolommen

Hoofdstuk 8 gaat nogmaals in op de aanpendelende belasting zoals geïntroduceerd in hoofdstuk 3. Voor diverse buigzame knikstaven wordt gekeken naar de kniklast. In de sheets wordt een iets andere benadering gekozen, Voor een aantal voorbeelden wordt onderzocht in hoeverre de exacte maximale belasting zich verhoudt tot het eenvoudige model dat in hoofdstuk 3 is gevonden.

$$\frac{F}{F_k} = \frac{1}{1 + \frac{ml}{l_1}}$$

Uit het onderzoek blijkt dat deze aanpak conservatief is en een goede afschatting geeft van de maximale belasting op een gekoppeld systeem waarbij het schorende element een op druk belaste buigzame staaf is. Nadere uitleg is ook gegeven in college.

Hoofdstuk 9 : Formule van Rayleigh

Dit hoofdstuk behoort niet tot de tentamenstof maar is onderdeel van het onderwerp Arbeid, Energie en Invloedslijnen uit ConstructieMechanica 4.

Hoofdstuk 10 : Vergrotingsfactor (starre-staaf-systemen)

In dit hoofdstuk wordt het begrip vergrotingsfactor geïntroduceerd. Dit onderwerp komt terug bij de construerende vakken en is buitengewoon belangrijk voor de ingenieurspraktijk. Het blijkt dat initieel scheefstaande constructies die op druk worden belast, door de excentrisch aangrijpende drukkracht, schever gaan staan. De uiteindelijke scheefstand kan worden uitgedrukt in de initiële scheefstand d.m.v. een zgn. vergrotingsfactor. Voor starre staafsystemen geldt:

$$w = \frac{n}{n-1} w_0 \quad \text{met : } n = \frac{F_k}{F}$$


Naarmate de belasting F dichterbij de kniklast komt neemt de vergrotingsfactor steeds meer toe. Om constructies dus min of meer ongevoelig te maken voor het 2^e orde effect (d.w.z. gevoelig voor het schever gaan staan door invloed van de excentrische kracht in combinatie met de initiële scheefstand) is het dus noodzakelijk de vergrotingsfactor niet te groot te laten worden. Een factor 1,1 betekent dat de verplaatsingen en ook de krachtsverdeling in de constructie met 10% toeneemt. Vaak is dit al onacceptabel. Om een vergrotingsfactor kleiner dan 1,1 te verkrijgen moet de factor n groter zijn dan 11. Hetgeen inhoudt dat de werkelijke belasting één-elfde-deel van de kniklast mag zijn!

Het onderdeel op blz. 211 betreffende de exacte oplossing die ook geldig is bij grote verplaatsingen is geen tentamenstof. Aardig detail van dit onderdeel is overigens wel dat de starre staaf met translatievoor een naknikgedrag heeft dat niet stabiel terwijl het systeem met een rotatievoor wel een stabiel naknikgedrag heeft.

Een initiële scheefstand kan ook worden veroorzaakt door horizontaal aangrijpende belastingen (netjes dwarsbelasting genoemd). Paragraaf 10.2 behandelt dit onderwerp. De initiële scheefstand ten gevolge van alleen de dwarsbelasting is in feite een eerstejaars mechanica-uitdaging en kan worden bepaald met een zgn. *eerste orde berekening*.

LET OP : Bestudeer grondig de begrippen die in dit hoofdstuk aan de orde komen, met name de begrippen *1^e en 2^e orde* zijn van belang !

Hoofdstuk 11 : Vergrotingsfactor (buigzame staven)

In hoofdstuk 11 wordt onderzocht of de vergrotingsfactor uit hoofdstuk 10 ook geldig is voor buigzame staven. Het blijkt in het algemeen niet zo te zijn maar de praktische formule geeft over het algemeen prima resultaten. In de colleges worden met behulp van voorbeelden de procedure uiteengezet hoe de exacte vergrotingsfactor kan worden bepaald. Ook hier geldt dat alleen de modelstappen van belang zijn. Op het tentamen wordt zeker niet gevraagd om voor een bijzonder geval de exacte vergrotingsfactor te bepalen. Paragraaf 11.3 is extra verrijkingstof en geen tentamenstof.

Hoofdstuk 12 : Benadering van knikbelasting uit 1^e orde

Dit hoofdstuk is geen tentamenstof.

Hoofdstuk 13 : Instabiliteit door niet-lineair materiaalgedrag

Het laatste onderwerp behandelt de invloed van plasticiteit op het bezwijkgedrag van constructies.

Voorkennis hiervoor is te vinden in Module 2, Hoofdstuk 3 van het deel **Mechanica : Statisch Onbepaalde Constructies en Bezwijkanalyse** van Hartsuijker en Welleman (3^e druk) . Bekijk vooral blz. 275 en met name paragraaf 3.1.3 (blz. 280) te bestuderen. Een samenvatting van het meest relevante onderdeel van dit hoofdstuk is hieronder weergegeven.

ACTIE: Loop zelf deze samenvatting na aan de hand van de genoemde passages!

Hier wordt voor een op buiging belaste doorsnede gekeken naar het maximale moment dat de doorsnede kan opnemen als we toestaan dat overal in de doorsnede vezels de trek en drukspanningen mogen toenemen tot de (maximale) vloeispanning van het materiaal.

Voor een rechthoekige doorsnede kan eenvoudig worden gevonden dat geldt:

$$M_p = \frac{bh^2}{4} f_y$$

Waarbij M_p staat voor het *volplastisch moment* van de doorsneden. Als alleen in de uiterste vezels de vloeispanning wordt toegestaan geldt de bekende elastische grenswaarde voor het moment in de doorsnede:

$$M_e = \frac{bh^2}{6} f_y$$

Voor de rechthoekige doorsnede geldt dat deze volplastisch 1,5 keer het elastisch moment kan dragen. Er zit dus boven de elastische grens voor deze doorsnede vorm nog flink wat *reserve draagvermogen* in de doorsnede. De factor 1,5 wordt de vormfactor genoemd en veelal aangeduid met de letter α .

Door plastisch gedrag van de doorsnede in combinatie met een initiële scheefstand kan veel eerder instabiliteit ontstaan. De kniklast is dan helemaal niet maatgevend. Op blz. 276 is in figuur 13.3 dit grafisch weergegeven. De kritieke belasting waarbij bezwijken door

instabiliteit ontstaat wordt aangegeven met F_c . Als w_p de verplaatsing is waarbij plasticiteit optreedt kan eenvoudig een verband worden gevonden tussen de kritieke belasting F_c , de kniklast F_k , de initiële scheefstand w_o en de verplaatsing w_p :

$$\frac{F_c}{F_k} + \frac{w_o}{w_p} = 1 \quad \text{formule van Merchant}$$

Als de initiële scheefstand wordt veroorzaakt door b.v. een horizontale belasting H_c dan kan deze formule worden herschreven tot:

$$\frac{F_c}{F_k} + \frac{H_c}{H_p} = 1$$

Hierin is H_p de kracht waarbij volgens een eerste orde berekening voor het eerst de doorsnede volplastisch wordt.

LET OP: 1^e orde betekent dus zonder de invloed van de excentrisch aangrijpende drukkracht want dat is juist de 2^e orde component in het geheel!

ACTIE: Bestudeer de uitgewerkte tentamenopgaven, maak deze ook zelf en maak de opgaven achter in het boek waarvan de antwoorden en veelal de uitwerkingen van zijn gegeven.